

CHỦ ĐỀ 4: HÌNH BÌNH HÀNH .

A/ LÝ THUYẾT.

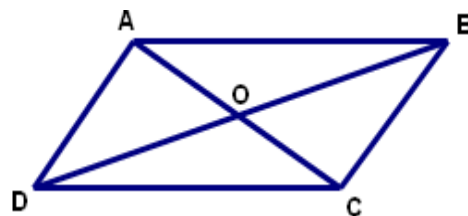
I. HÌNH BÌNH HÀNH

1. Định nghĩa:

“Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song”

$$ABCD \text{ là hình bình hành } \Leftrightarrow \begin{cases} AB // DC \\ AD // BC \end{cases}$$

Chú ý: Hình bình hành là hình thang đặc biệt (là hình thang có hai cạnh bên song song).



2. Tính chất: Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau

$$AB = DC ; AD = BC$$

- Các góc đối bằng nhau

$$A = C ; B = D$$

- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O $\Rightarrow$ O là trung điểm của AC và BD

3. Dấu hiệu nhận biết: (Dùng chứng minh một tứ giác là Hình Bình Hành).

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.

- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.

- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành

- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

II/ ĐỐI XỨNG TÂM

1. Hai điểm đối xứng qua một điểm:

Định nghĩa: Hai điểm gọi là *đối xứng với nhau qua điểm I* nếu I là *trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó*.

Hai điểm A và A' gọi là hai điểm đối xứng với nhau qua điểm I.

2. Hai hình đối xứng qua một điểm:

Định nghĩa: Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm I nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng với một điểm thuộc hình kia qua điểm I và ngược lại.

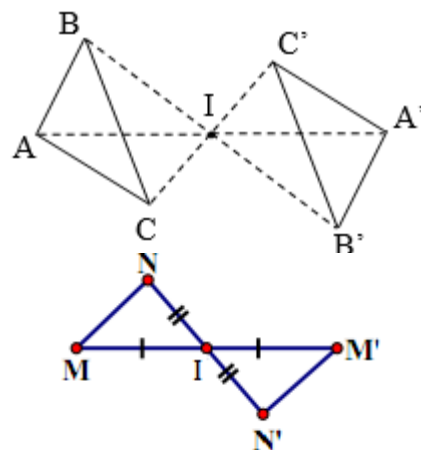
Điểm I gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.

$\Delta A'B'C'$ đối xứng với ΔABC qua tâm I khi:

- +) A' đối xứng với A qua I
- +) B' đối xứng với B qua I
- +) C' đối xứng với C qua I.

Đoạn $M'N'$ đối xứng với đoạn MN qua tâm I khi:

- +) M' đối xứng với M qua I
- +) N' đối xứng với N qua I



3. Hình có tâm đối xứng:

Định nghĩa: Điểm I gọi là tâm đối xứng qua hình H nếu điểm đối xứng với mỗi điểm thuộc hình H qua điểm I cũng thuộc hình H.

Định lý: Giao điểm hai đường chéo của hình bình hành là tâm đối xứng của hình bình hành đó

B/ BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình bình hành ABCD. Trên tia đối của tia AD lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AC, BD gặp nhau tại một điểm.

Giải

* Tìm cách giải

AC và BD là hai đường chéo của hình bình hành ABCD nên chúng cắt nhau tại trung điểm O của AC. Ta còn phải chứng minh MN đi qua O. Muốn vậy chỉ cần chứng minh AMCN là hình bình hành để suy ra đường chéo MN đi qua trung điểm O của AC.

* Trình bày lời giải

Tứ giác AMCN có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên là hình bình hành.

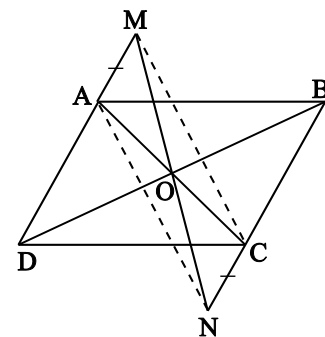
$\Rightarrow$ hai đường chéo MN và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên hai đường chéo BD và AC cắt nhau tại trung điểm O của AC.

Vậy các đường thẳng MN, BD và AC cùng đi qua trung điểm O của AC.

Nhận xét: Hai hình bình hành AMCD và ABCD có chung đường chéo AC thì các đường chéo của chúng đồng quy tại trung điểm của đường chéo chung.

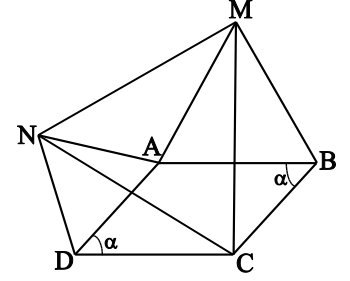
Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các tam giác đều ABM và ADN. Chứng minh rằng tam giác CMN là tam giác đều.



Giải

*** Tìm cách giải**

Đề bài cho hình bình hành và các tam giác đều nên có nhiều đoạn thẳng bằng nhau, nhiều góc bằng nhau. Do đó có thể nghĩ đến việc chứng minh tam giác bằng nhau.



*** Trình bày lời giải**

Ta đặt $ABC = \alpha$ thì $ADC = \alpha$; $BAD = 180^\circ - \alpha$;

$$MAN = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 180^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha.$$

$\triangle MAN$ và $\triangle CDN$ có

$$AM = DC (= AB); \quad MAN = CDN (= 60^\circ + \alpha); \quad AN = DN.$$

$$\text{Do đó } \triangle MAN = \triangle CDN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MN = CN. \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được } \triangle MAN = \triangle MBC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MN = MC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MN = CN = MC$. Vậy $\triangle CMN$ đều.

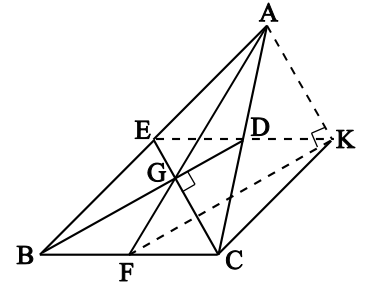
Nhận xét: Việc đặt $ABC = \alpha$ là một kĩ thuật giúp ta tính toán và so sánh góc được nhanh chóng, tiện lợi.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến vuông góc với nhau thì tổng các bình phương của hai đường trung tuyến này bằng bình phương đường trung tuyến thứ ba.

Giải

*** Tìm cách giải**

Kết luận của bài toán gợi ý cho ta vận dụng định lí Py-ta-go. Muốn vậy phải vẽ hình phụ tạo ra một tam giác vuông có ba cạnh bằng ba đường trung tuyến.



*** Trình bày lời giải**

Giả sử tam giác ABC là tam giác có hai đường trung tuyến BD và CE vuông góc với nhau. Ta phải chứng minh $BD^2 + CE^2 = AF^2$ (AF là đường trung tuyến thứ ba).

Trên tia ED lấy điểm K sao cho D là trung điểm của EK. Tứ giác AKCE có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

$$\Rightarrow AK \parallel CE \text{ và } AK = CE.$$

$$\text{Ta có } DE \parallel BC \text{ và } DE = \frac{1}{2}BC \Rightarrow DK \parallel BF \text{ và } DK = BF.$$

$$\text{Vậy tứ giác DKFB là hình bình hành} \Rightarrow KF \parallel BD \text{ và } KF = BD.$$

Mặt khác, $BD \perp CE$ nên $AK \perp KF$.

Do đó ΔKAF vuông tại $A \Rightarrow AK^2 + KF^2 = AF^2 \Rightarrow CE^2 + BD^2 = AF^2$.

II. BÀI TẬP VẬN DỤNG

• Tính chất hình bình hành

Bài 1: Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ ra phía ngoài của tam giác này các tam giác ABD và tam giác ACE vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của DE . Chứng minh rằng hai đường thẳng MA và BC vuông góc với nhau.

Bài 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra ngoài hình bình hành các tam giác ABM vuông cân tại A , tam giác BCN vuông cân tại C . Chứng minh rằng tam giác DMN vuông cân.

Bài 3: Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H . Chứng minh rằng chu vi của tam giác ABC lớn hơn $\frac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

Bài 4: Cho hình thang cân $ABCD$ ($AB \parallel CD$) và một điểm O ở trong hình này. Chứng minh rằng có một tứ giác mà bốn cạnh lần lượt bằng OA, OB, OC, OD và bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của hình thang cân.

Bài 5: Cho hình bình hành $ABCD$ và đường thẳng xy không cắt các cạnh của hình bình hành. Qua các đỉnh A, B, C, D vẽ các đường thẳng vuông góc với xy , cắt xy lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Bài 6: Cho hình bình hành $ABCD$ ($AD < AB$). Vẽ ra ngoài hình bình hành tam giác ABM cân tại B và tam giác ADN cân tại D sao cho $ABM = ADN$.

a) Chứng minh rằng $CM = CN$;

b) Trên AC lấy một điểm O . Hãy so sánh OM với ON .

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A , $AB < BC$. Trên tia AB có điểm D , trên tia CA có điểm E sao cho $AD = DE = EC = CB$. Tính các góc của tam giác ABC .

• Nhận biết hình bình hành

Bài 8: Chứng minh rằng trong một tứ giác, đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo và các đoạn thẳng nối trung điểm của hai cặp cạnh đối diện gặp nhau tại một điểm (định lý Giéc-gôn, nhà toán học Pháp).

Bài 9: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, NB, MC, MD . Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, EF, GH đồng quy.

Bài 10: Cho đoạn thẳng PQ và một điểm A ở ngoài đường thẳng PQ. Vẽ hình bình hành ABCD có đường chéo BD // PQ và BD = PQ. Chứng minh rằng mỗi đường thẳng BC và CD luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 11: Trong tất cả các tứ giác với hai đường chéo có độ dài m và n cho trước và góc xen giữa hai đường chéo có độ lớn α cho trước hãy xác định tứ giác có chu vi nhỏ nhất.

• **Dựng hình bình hành**

Bài 12: Cho tam giác ABC. Dựng điểm $M \in AB$, điểm $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC$ và $BM = AN$.

Bài 13: Dựng hình bình hành ABCD biết vị trí của điểm A và vị trí các trung điểm M, N của BC và CD.

Bài 14: Cho trước hai điểm A và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng d. Một đoạn thẳng CD có độ dài a cho trước nằm trên đường thẳng d. Hãy xác định vị trí của điểm C và D để tổng $AC + CD + DB$ nhỏ nhất.

Bài 15: Hai điểm dân cư A và B ở hai bên một con sông có hai bờ d và d'. Chiều rộng con sông bằng a. Hãy tìm địa điểm bắc cầu sao cho quãng đường từ A sang B là ngắn nhất (cầu vuông góc với bờ sông).